

Metodología de Superficie de Respuesta. Aplicaciones a la Ingeniería

Mg. Ing. Pablo Argenti

Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta, Provincia de Salta, Argentina.

pabloargenti@ymail.com

RESUMEN

La Metodología de Superficie de Respuesta es una técnica matemático - estadística que modela y analiza situaciones problemáticas en las que una variable de interés es influenciada por otras variables. El punto de partida será el diseñar un experimento apropiado, de tal manera de obtener valores de la variable de interés identificándola como la respuesta del experimento, luego se procederá a la modelización matemática, determinando el modelo matemático que mejor explica el fenómeno experimental. Finalmente, esta metodología busca establecer los valores de los factores que optimizan la variable respuesta.

Las aplicaciones a la ingeniería corresponden a diferentes intervenciones de la cátedra de Estadística Experimental de la carrera de Ingeniería Industrial de la Facultad de Ingeniería - UNSa, aportando los conocimientos estadísticos en trabajos de optimización de ingredientes en la industria alimenticia. También la cátedra intervino en proyectos de investigación aportando los conocimientos estadísticos en materia de MSR.

Palabras Claves: METODOLOGIA, SUPERFICIE, RESPUESTA, ESTADISTICA, APLICACIONES

1. INTRODUCCION

La Metodología de Superficie de Respuesta es una técnica matemático - estadística que modela y analiza situaciones problemáticas en las que una variable de interés es influenciada por otras variables. El punto de partida será el diseñar un experimento apropiado, de tal manera de obtener valores de la variable de interés identificándola como la respuesta del experimento, luego se procederá a la modelización matemática, determinando el modelo matemático que mejor explica el fenómeno experimental. Finalmente, esta metodología busca establecer los valores de los factores que optimizan la variable respuesta.

La metodología de superficie de respuesta (MSR), es una colección de técnicas que permite al investigador inspeccionar una respuesta, que se puede mostrar como una superficie, cuando los experimentos investigan el efecto que tiene al variar factores cuantitativos en los valores que toma una variable dependiente o respuesta (Box-Wilson, 1951) ^[1].

La MSR es un conjunto de técnicas matemáticas y estadísticas que son útiles para la modelización y análisis en aplicaciones en las que una respuesta de interés es influenciada por distintas variables y el objetivo es optimizar esta respuesta (García-Díaz, 1995) ^[2].

La MSR es la estrategia experimental y de análisis que permite resolver el problema de encontrar las condiciones de operación óptimas de un proceso, es decir, aquellas que dan por resultado "valores óptimos" de una o varias características de calidad del producto (Gutiérrez – De La Vara, 2008) ^[3]. Luego de una primera etapa experimental, se presenta la necesidad de desplazar la región experimental en una dirección adecuada, buscando optimizar la variable respuesta. Este es el objetivo final de esta metodología, que se diferencia notablemente de la

comparación de tratamientos dado que esto solamente arroja como resultado final cual podría ser el tratamiento ganador entre todos aquellos que se han probado.

Los orígenes de la Metodología de Superficie de Respuesta (MSR) como tal se remiten al trabajo de Box y Wilson (1951), pero fue en los últimos 20 años que debido en parte a las computadoras, esta metodología ha tenido un desarrollo considerable tanto en aspectos teóricos como en aplicaciones. En lo que concierne al desarrollo teórico y expresiones de cálculo de la MSR, como así también a la aplicación de diferentes software que se exponen en este trabajo remiten a la producción bibliográfica de "Gutiérrez – De La Vara, 2008"

En cuanto a las aplicaciones a la ingeniería que se citan en el desarrollo del presente trabajo corresponden a diferentes intervenciones de la cátedra de Estadística Experimental de la carrera de Ingeniería Industrial de la Facultad de Ingeniería - UNSa, aportando los conocimientos estadísticos en trabajos de optimización de ingredientes en la industria alimenticia, con datos aportados por alumnos de la carrera de nutrición de la Facultad de Cs. de la Salud – UNSa. en la elaboración de su trabajo final de carrera. También la cátedra intervino en proyectos de investigación conjuntamente con el INTA, aportando los conocimientos estadísticos en materia de MSR.

2. METODOLOGIA

La MSR parte de un diseño experimental, para luego proceder a la modelización matemática y finalmente aplicar técnicas de optimización. Para pretender explorar el modelo ajustado con fines de optimización se recomienda que este explique al menos el 70% del comportamiento de la respuesta, $R_{aj}^2 \geq 70\%$

2.1 Etapas en el MSR

- Cribado: Identificación de factores que tengan mayor influencia.
- Búsqueda I (1er. Orden): Se pretende detectar curvatura, se utiliza un diseño factorial completo o fraccionado con repeticiones en el centro.
- Búsqueda II (2do. Orden): Detectar las causas de la curvatura, se aumenta el experimento o se corre uno nuevo.

Región de operabilidad y región experimental

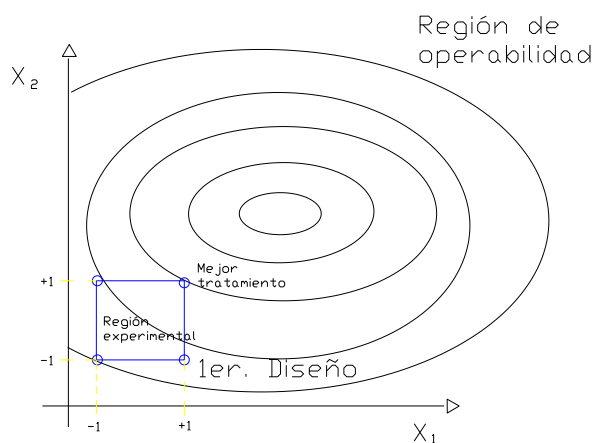


Gráfico 1, primer diseño

2.2 Búsqueda I (1er. Orden)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \varepsilon$$

(Se supone que solo son importantes los efectos principales)

Diseños factoriales 2^k

Diseños factoriales fraccionados 2^{k-1}

Diseños de Plackett-Burman

Diseño Simplex

Son diseños con propiedad de ortogonalidad. Se considera que un diseño es ortogonal cuando los coeficientes estimados en el modelo ajustado no están correlacionados entre si.

Es importante aumentar estos arreglos con repeticiones al centro a fin de detectar la presencia de curvatura o falta de ajuste del modelo.

Desplazamiento

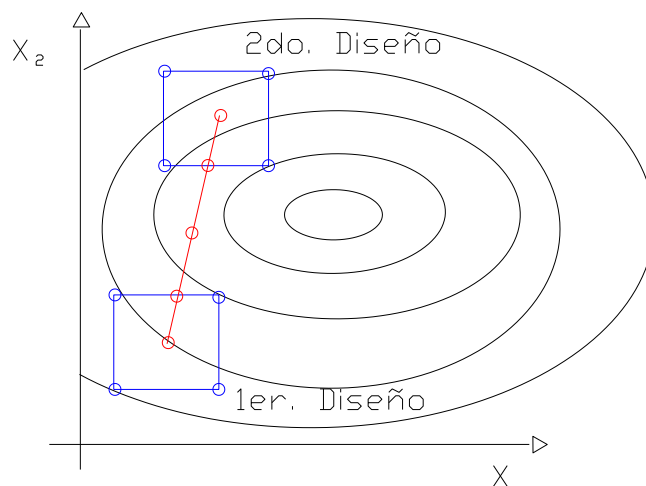


Gráfico 2, primer y segundo diseño

2.3 Búsqueda II (2do. Orden)

Se detecta la presencia de curvatura (la superficie es más complicada que un súper plano). Se completa un diseño de segundo orden para caracterizar mejor la superficie y modelar la curvatura. Se estima que el punto óptimo se encuentra dentro de la región experimental.

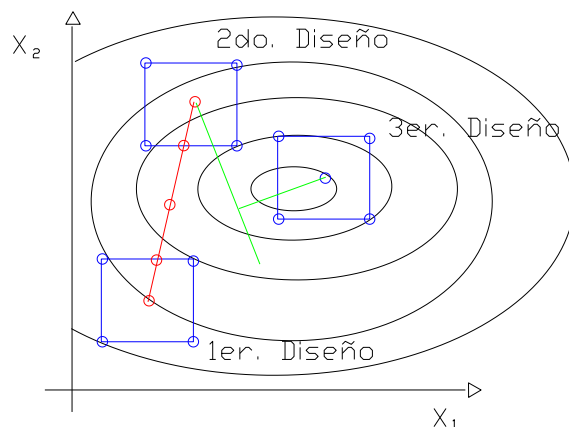


Gráfico 3, primer, segundo y tercer diseño

Los diseños de 2do. Orden

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon$$

Permiten ajustar un modelo de 2° orden para estudiar además de los efectos lineales y de interacción, los efectos cuadráticos o de curvatura pura, modelo jerarquizado.

- Diseño de Box-Behnken
- Diseño de composición central
- Diseño de composición central con centros en las caras.
- Diseño central compuesto pequeño.

Gráfica espacial de la superficie de respuesta

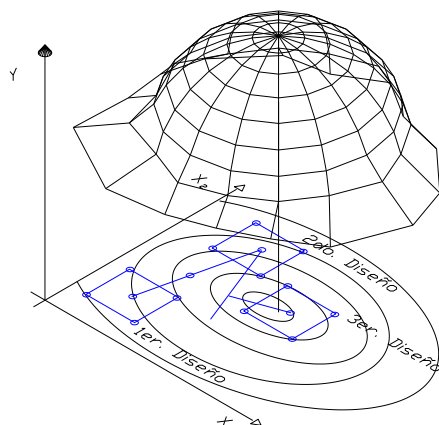


Gráfico 4, vista espacial de la superficie de respuesta

2.4 Técnicas de optimización

En la búsqueda del óptimo es preciso verificar que el modelo cumpla los supuestos de normalidad, varianza constante e independencia de los residuos.

El modelo ajustado debe explicar al menos el 70 % del comportamiento de la respuesta (El coeficiente de determinación $R_{aj}^2 > 70 \%$)

2.5 Métodos de optimización:

Método Gráfico

Método de la función de deseabilidad (analítico), función de los factores de control que transforma los valores predichos por el modelo a una escala [0; 1], para indicar que tan deseable son.

3. APLICACION

Ejemplo: "Pan con harina de nopal"

Se sabe que el consumo de fibra es importante para el buen funcionamiento intestinal por lo cual muchas personas incluyen fibra de nopal en su dieta.

Se elaboraron panes a diferentes formulaciones adicionadas de harina de nopal, al 20%, 15% y 10%, suponiendo que la formulación adicionada al 10% sería la más aceptada por los panelistas.

Debido a que en un principio los parámetros evaluados no fueron del todo satisfactorios, se optó por adicionarle sabor chocolate para enmascarar el sabor a nopal que para muchos les es desagradable, lo que permitió un mayor grado de aceptación.

3.1 Obtención de unidades codificadas:

$$x_1 = \frac{HN(\%) - 15}{10}$$

$$x_2 = \frac{CH(\%) - 15}{10}$$

3.2 Tabla de datos:

Nopal(%)	Choc(%)	Aceptación general	
		R1	R2
-1	-1	7,1	7
1	-1	4,4	4,9
-1	1	4,8	5,35
1	1	2,1	3,25
-1,41421	0	6,4	5,8
1,41421	0	5	4,9
0	-1,41421	5,8	5,9
0	1,41421	3,8	4,4
0	0	7,9	8,3
0	0	7,5	7,8
0	0	8,2	7,6
0	0	8,1	8,3
0	0	8	8,1

Tabla 1, datos para Diseño Central Compuesto

3.3 Análisis de datos:

Corrida de los datos con MINITAB, DISEÑO CENTRAL COMPUESTO

Central Composite Design			
Factors:	2	Replicates:	2
Base runs:	13	Total runs:	26
Base blocks:	1	Total blocks:	1
Two-level factorial: Full factorial			
Cube points:	8		
Center points in cube:	10		
Axial points:	8		
Center points in axial:	0		
Alpha: 1.41421			

Response Surface Regression: Acep.Gral. versus Nopal(%), Choc(%)

The analysis was done using coded units.					
Estimated Regression Coefficients for Acep.Gral.					
Term	Coef	SE Coef	T	P	
Constant	7.98000	0.1684	47.390	0.000	
Nopal (%)	-0.80329	0.1331	-6.034	0.000	
Choc (%)	-0.80311	0.1331	-6.033	0.000	
Nopal (%) *Nopal (%)	-1.32438	0.1428	-9.277	0.000	
Choc (%) *Choc (%)	-1.59938	0.1428	-11.203	0.000	
Nopal (%) *Choc (%)	-0.00000	0.1883	-0.000	1.000	
S = 0.5325 R-Sq = 92.9% R-Sq(adj) = 91.1%					

Analysis of Variance for Acep.Gral.

Source	DF	Seq SS	Adj SS	Adj MS	F	P
Regression	5	73.8542	73.8542	14.7708	52.09	0.000
Linear	2	20.6442	20.6442	10.3221	36.40	0.000
Square	2	53.2100	53.2100	26.6050	93.83	0.000
Interaction	1	0.0000	0.0000	0.0000	0.00	1.000
Residual Error	20	5.6711	5.6711	0.2836		
Lack-of-Fit	3	3.6626	3.6626	1.2209	10.33	0.000
Pure Error	17	2.0085	2.0085	0.1181		
Total	25	79.5254				

3.4 Superficie de respuesta:

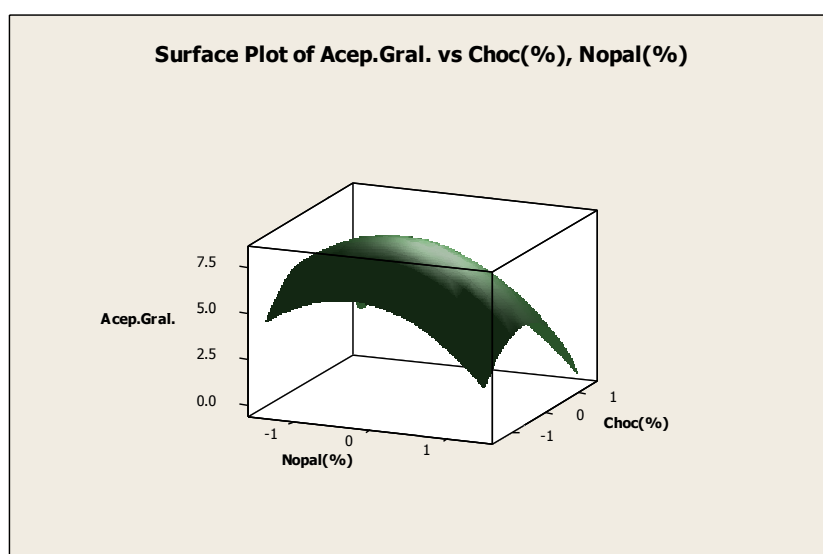


Grafico 5, Representación de la superficie de respuesta, MINITAB

3.5 La función de deseabilidad, función de los factores de control que transforma los valores predichos por el modelo a una escala [0; 1], para indicar que tan deseable son:

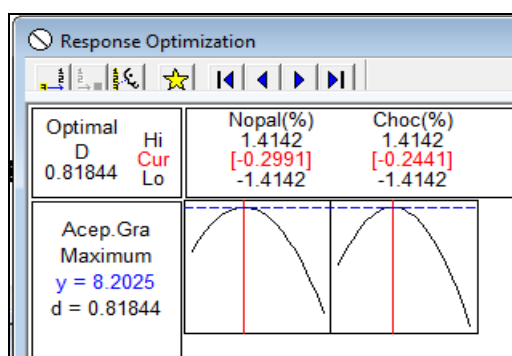


Grafico 6, Captura de la función de deseabilidad, MINITAB

3.6 Gráfica de contornos y el óptimo

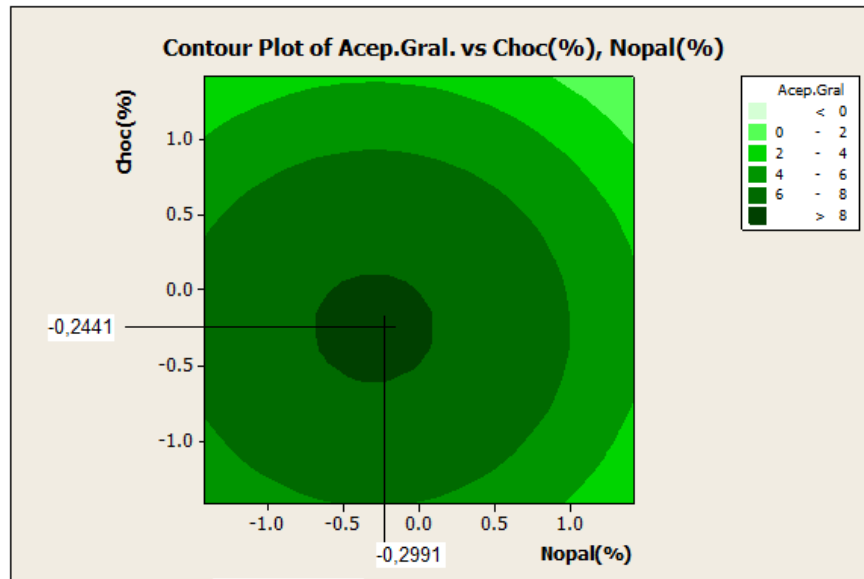


Gráfico 7, contornos y el óptimo

3.7 Decodificando valores

$$-0,2991 = \frac{HN(\%) - 15}{10} ; HN(\%) = 12,009\%$$

$$-0,2441 = \frac{CH(\%) - 15}{10} ; CH(\%) = 12,559\%$$

4. CONCLUSIONES

La Metodología de Superficie de Respuesta se constituye en una poderosa herramienta estadística aplicada a la optimización de procesos, modelando y analizando situaciones problemáticas en la que una variable de interés es influenciada por otras variables. Luego de una primera etapa experimental permite desplazar la región experimental en una dirección adecuada, buscando optimizar la variable respuesta. Este es el objetivo final de esta metodología, que se diferencia notablemente de la comparación de tratamientos dado que esto solamente arroja como resultado final cual podría ser el tratamiento ganador entre todos aquellos que se han probado. Esta metodología resulta notablemente útil en campos de dominio de la ingeniería, donde hay que definir situaciones complejas en procesos operativos buscando la óptima combinación de diferentes variables, como por ejemplo formulaciones en % de ingredientes en la industria alimenticia, evaluar la presencia de catalizadores en reacciones químicas, dosificación de materiales para la conformación de probetas de hormigón armado, etc.

5. BIBLIOGRAFIA

[1] Box, G. E. P., Wilson, K. G., "On the experimental attainment of optimum conditions", Journal of the Royal Statistical Society, B 13, pp. 1-45, 1951

[2] García-Díaz, A., Phillips D.T., "Principles of Experimental Design and Analysis", Chapman & Hall; New York, 1995,

[3] Gutiérrez Pulido, H., De la Vara Salazar, R. "Análisis y Diseño de Experimentos" segunda edición, Mc Graw Hill, México, 2008

[4] Montgomery, D.C., R.H. Myers, "Response surface methodology: Process and product in optimization using designed experiments", John Wiley & Sons, New York, 1995

[5] Box, G., Hunter, W. & Hunter, J. Statistics for experimenter. An introduction to design, data analysis and model building. USA: John Wiley & Sons; 1978.