I Jornadas de Estadística Aplicada
5 y 6 de Diciembre de 2018

ESTADÍSTICA EXPERIMENTAL
COMPARACIÓN EN MEDICION DE RESISTENCIAS

Alumnos: Condorí Flores Lucas
Caiconte Gastón Luis
Guanuco Marcelo Jonás
Díaz Maximiliano Josué
Reynaga Rodrigo

Facultad de Ingeniería
Ingeniería Electromecánica
Universidad Nacional de Salta – Salta, Capital

Datos del alumno Condorí Flores Lucas:
Correo: lucascondori14@gmail.com
Cel.:3874505346

RESUMEN

Este trabajo presenta una aplicación práctica de los temas desarrollados en la materia Estadística Experimental. Se diseñó una experiencia en la cual se trata de abarcar la mayoría de los conceptos utilizados en la asignatura, obteniendo un ejemplo de cómo estos temas son aplicados para la resolución de diversos problemas y para la toma de decisiones, usando previamente un marco teórico de los mismos, donde se puede entender su metodología, la manera correcta de aplicarlos y en qué casos son convenientes usarlos, ya que se deben cumplir varios requisitos o realizar suposiciones.

El trabajo en sí es sencillo de hacer, el cual requiere de pocos elementos (solamente dos multímetros y resistencias) y el conocimiento de ellos para poder usarlos correctamente. En cada caso se hará mención de qué teorema o prueba se está realizando, para poder comparar si los resultados finales son coherentes y si se llega a la misma conclusión o razonamiento.

PALABRAS CLAVES:

- Estimación.
- Nivel de confianza.
- Prueba de hipótesis.
- Tratamiento.
- Variación.

INTRODUCCION

En este trabajo estadístico se desarrollarán conceptos aprendidos en clase haciendo hincapié en los temas de: Estimación de promedios poblacionales, Estimación de proporciones y varianzas y Pruebas de hipótesis para parámetros poblacionales. Estos se aplicarán para desarrollar el cálculo estadístico de una prueba experimental, la misma consiste en la medición de resistencias de un 1kΩ para determinar la comparación de 2 multímetros y de poder estimar la calidad de ambos, donde podremos concluir con que instrumento realizar una medición que mejor sea de nuestra aceptación para la experimentación. Luego se incluirán más temas los cuales serán desarrollados prácticamente para este trabajo, tales como el análisis de varianza, prueba de normalidad, pruebas no paramétricas, entre otros.

METODOLOGIA

Se disponen de 40 resistencias de igual valor todas y de dos multímetros los cuales serán utilizados para medir el valor de cada resistencia, realizando mediciones de a pares, es decir que se compararán los valores obtenidos de cada instrumento. Se diseñarán los problemas para resolver con sus consignas especificando lo que se desea hacer. Los resultados obtenidos serán volcados en una tabla la cual servirá de referencia para los cálculos que sean necesarios.

Para la realización del trabajo se mostrará previamente la parte teórica de los temas que utilizaremos para el desarrollo de este.

Marco teórico (información extraída de [(1)] y [(2)]):

Teorema del límite central

El teorema del límite central dice que, bajo condiciones más bien generales, las sumas y medias de muestras aleatorias de mediciones tomadas de una población tiendes a tener una distribución aproximadamente normal.

Si muestras aleatorias de n observaciones se sacan de una población no normal con media finita μ y deviación estándar σ, entonces, cuando n es grande, la distribución de muestreo de la media muestral $\bar{x}$ está distribuida normalmente en forma aproximada, con media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

La aproximación se hace más precisa cuando *n* se hace grande. Para los casos prácticos, podremos hacer esta aproximación cuando *n* es mayor o igual que 30.

Distribución de la media muestral

Si una muestra aleatoria de n mediciones se selecciona de una población con media μ y desviación estándar σ, la distribución muestral de la media muestral $\bar{x}$, tendrá media μ y desviación estándar $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si la población tiene una distribución normal, la distribución muestral de $\bar{x}$ estará exactamente distribuida en forma normal, cualquiera que sea el tamaño muestral n.

Si la distribución poblacional es no normal, a distribución muestral de $\bar{x}$ estará distribuida normalmente en forma aproximada para muestras grandes (por el teorema del límite central).

Si se sabe que la distribución muestral de $\bar{x}$ es normal o normalmente aproximada, se puede describir el comportamiento de la media muestral $\bar{x}$ al calcular la probabilidad de observar ciertos valores de $\bar{x}$ en muestreo repetido. Los valores necesarios de $\bar{x}$ son convertidos en valores *z* utilizando la ecuación:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

De esta manera, con el valor de *z* se busca la probabilidad por tabla.

Estimación de la diferencia entre dos medias poblacionales

Un problema de igual importncia que la estimacion de una sola media poblacional μ, para una poblacion cuantitativa, es la comparacion de dos medias poblaciones. Se puede hacer una comparacion como esta:

- El promedio de diametros de tallos de plantas crecidas cons dos tipos diferentes de nutrientes.

Para este ejemplo, hay dos poblaciones: la primera con media y varianza (μ_1 y σ_1^2) y la segunda con media y varianza (μ_2 y σ_2^2). Una muestra aleatoria de n_1 mediciones se saca de la población 1 y una segunda muestra aleatoria de tamaño n_2 se saca de manera independiente de la población 2. Por últimos, las estimaciones de los parámetros poblacionales se calculan a partir de los datos muestrales usando los estimadores $\overline{x_1}$, s_1^2, $\overline{x_2}$ y s_2^2 como se ve en la tabla:

Muestras de dos poblaciones cuantitativas

	Población 1	Población 2
Media	μ_1	μ_2
Varianza	σ_1^2	σ_2^2

	Tamaño muestral 1	Tamaño muestral 2
Media	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$
Varianza	s_1^2	s_2^2
Muestra	n_1	n_2

Intuitivamente, la diferencia entre dos medias muestrales daría la máxima información acerca de la diferencia real entre dos medias poblacionales y este es de hecho el caso.

Propiedades de la distribución muestral de ($\overline{x_1} - \overline{x_2}$), la diferencia entre dos medias muestrales

Cuando muestras aleatorias independientes de n_1 y n_2 observaciones ha sido seleccionadas entre poblaciones con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, la distribución muestral de la diferencia ($\overline{x_1} - \overline{x_2}$) tiene las siguientes propiedades:

1. La media de $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$ es

$$\mu_1 - \mu_2$$

y el error estándar es

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

que se puede estimar como

$$\text{SE} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \text{ cuando los tamaños muestrales son grandes.}$$

2. Si las poblaciones muestreadas están distribuidas normalmente, entonces la distribución muestral de ($\overline{x_1} - \overline{x_2}$) está distribuida normalmente exactamente, cualquiera que sea el tamaño muestral.

3. Si las poblaciones muestreadas no están distribuidas normalmente, entonces la distribución muestral ($\overline{x_1} - \overline{x_2}$) está distribuida normalmente aproximadamente cuando n_1 y n_2 son ambas de 30 o más, debido al teorema del limite central.

Como ($\mu_1 - \mu_2$) es la media de la distribución muestral, se deduce que ($\overline{x_1} - \overline{x_2}$) es un estimador insesgado de ($\mu_1 - \mu_2$) con una distribución aproximadamente normal cuando n_1 y n_2 son grande. Esto es, el estadístico:

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Tiene una distribución z normal aproximadamente estándar, se pueden usar para construir estimaciones puntuales y de intervalo. Aun cuando la elección entre estimación puntual y de intervalo depende de la preferencia personal del usuario, casi todos los experimentadores escogen construir intervalos de confianza para problema de dos muestras. Las fórmulas apropiadas para ambos métodos se dan a continuación:

- Estimación puntual de (μ_1-μ_2) de muestra grande

Estimador puntual: $(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)$

95% margen de error: $\pm\ 1.96\ \mathrm{SE} = \pm\ 1.96\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$

- Un intervalo de confianza de muestra grande de (1-α)100% para (μ_1-μ_2)

$$(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

Estimación de una varianza muestral

El procedimiento estadístico usual para comparar dos varianzas de población, ${\sigma_1}^2$ ${\sigma_2}^2$, hace una inferencia acerca del cociente o razón ${\sigma_1}^2/\,{\sigma_2}^2$. Esto se hace porque la distribución de muestreo del estimador de ${\sigma_1}^2/\,{\sigma_2}^2$ es bien conocido cuando las muestras se seleccionan de forma aleatoria e independiente de dos poblaciones normales. Con estos supuestos:

$$F = \frac{{S_1}^2}{{S_2}^2}\frac{{\sigma_2}^2}{{\sigma_1}^2}$$

Una distribución F puede ser simétrica alrededor de su media, sesgada a la izquierda o sesgada a la derecha; su forma exacta depende de los grados de libertad asociados a ${S_1}^2$, ${S_2}^2$, es decir: *(n_1-1) y (n_2-1).*

A fin de establecer límites de confianza superiores e inferiores para la razón de varianzas, debemos encontrar los valores tabulados de F.

Supuestos para el intervalo de confianza para el cociente de dos varianzas de población:

1-Las dos poblaciones de las que se seleccionan las muestras tienen distribuciones de frecuencia relativa aproximadamente normales.

2-Las muestras aleatorias se seleccionan de forma independiente de las dos poblaciones.

Prueba de hipótesis

El objetivo de una prueba estadística es probar una hipótesis concerniente a los valores de uno o más parámetros poblacionales. Por lo general tenemos una teoría, es decir una hipótesis de investigación, acerca del o los parámetros que deseamos apoyar.

El apoyo para esta hipótesis de investigación, también llamada hipótesis alternativa, se obtiene mostrando (usando los datos muestrales como evidencia) que lo contrario de la hipótesis alternativa, llamado hipótesis nula, es falso. Entonces, una teoría se comprueba demostrando que no hay evidencia que sustente la teoría opuesta: en cierto sentido, una prueba por contradicción.

Si podemos demostrar que los datos apoyan el rechazo de la hipótesis nula (el valor mínimo necesario para una conseguir una mayoría) en favor de la hipótesis alternativa hemos alcanzado nuestro objetivo de investigación. Aun cuando es común hablar de probar una hipótesis nula, el objetivo de investigación suele ser demostrar apoyo para la hipótesis alternativa, si dicho apoyo se justifica.

Los elementos de una prueba estadística

1. Hipótesis nula, H_0
2. Hipótesis alternativa, H_a
3. Estadístico de prueba
4. Región de rechazo

Prueba estadística de muestras grandes para ($\mu_1 - \mu_2$)

1. Hipótesis nula: *Ho:* $(\mu_1 - \mu_2) = Do$, donde Do es alguna diferencia especificada que se desea probar. Para muchas pruebas, el experimentador hará hipótesis de que no hay diferencia entre µ1 y µ2; esto es, *Do=0*.
2. Hipótesis alternativa:

Prueba de una cola

$H_a : (\mu_1 - \mu_2) > D_0$
[o $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]

Prueba de dos colas

$H_a : (\mu_1 - \mu_2) \neq D_0$

3. Estadístico de prueba: $z \approx \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_o}{SE} = \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2) - D_o}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$
4. Región de rechazo: rechazar Ho cuando

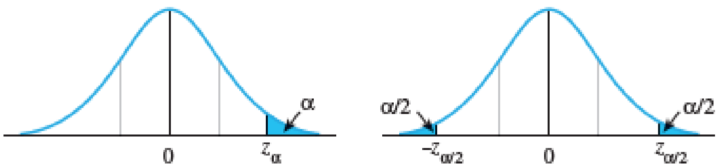
Prueba de una cola

$z > z_\alpha$
[o $z < -z_\alpha$ cuando la hipótesis alternativa es $H_a : (\mu_1 - \mu_2) < D_0$]

o cuando el valor $p < \alpha$

Prueba de dos colas

$z > z_{\alpha/2}$ o bien $z < -z_{\alpha/2}$



Suposiciones: Las muestras son seleccionadas al azar y de manera independiente de las dos poblaciones $n_1 \geq 30$ y $n_2 \geq 30$.

Evaluación de las propiedades de una prueba estadística

Puesto que una prueba estadística solo puede tener uno de dos resultados (rechazar o no rechazar la hipótesis nula), la conclusión de la prueba solo está sujeta a dos tipos de error.

ERROR TIPO I: Rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera. La probabilidad de cometer este error se denota por el símbolo α.

ERROR TIPO II: Aceptar la hipótesis nula cuando esta es falsa. La probabilidad de cometer este error se denota por el símbolo β.

En conclusión, es importante calcular las dos probabilidades, α y β, a fin de evaluar la confiabilidad de las inferencias derivadas de la prueba de hipótesis.

Otras pruebas de hipótesis

Un caso específico de ajuste a una distribución teórica es la correspondiente a la distribución normal. Este contraste se realiza para comprobar si se verifica la hipótesis de normalidad necesaria para que el resultado de algunos análisis sea fiable, como por ejemplo para el ANOVA.

Para comprobar la hipótesis nula de que la muestra ha sido extraída de una población con distribución de probabilidad normal se puede realizar un estudio gráfico y/o analítico.

Estas son: a) Prueba de Chi-Cuadrado de Pearson

b) Prueba de Kolmogorov- Smirnov

c) Prueba de Shapiro – Wilks

Prueba de Shapiro – Wilks: Cuando la muestra es como máximo de tamaño 50 se puede contrastar la normalidad con la prueba de Shapiro Shapiro-Wilks.

1) Hipótesis: Ho: La variable aleatoria no tiene una distribución normal

Ha: La variable aleatoria tiene una distribución norma

2) Estadístico de prueba: $W_c = \dfrac{b^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2}$

El término $b = \sum_{i=1}^{k} a_i[X_{(n-i+1)} - X_i]$, siendo a_i = el valor de un coeficiente que se encuentra tabulado para cada tamaño de muestra y la posición i de cada observación. El término $[X_{(n-i+1)} - X_i]$ = diferencias sucesivas que se obtienen al restar el primer valor al último valor, el segundo al penúltimo, el tercero al antepenúltimo y así hasta llegar a restar el último al primer valor. Por ejemplo, si se tienen siete valores, la secuencia de diferencias es la siguiente:

Observación i	Valores X_i ordenados en orden ascendente	$\left[X_{(n-i+1)} - X_i\right]$
1	X_1	$X_7 - X_1$
2	X_2	$X_6 - X_2$
3	X_3	$X_5 - X_3$
4	X_4	$X_4 - X_4$
5	X_5	$X_3 - X_5$
6	X_6	$X_2 - X_6$
7	X_7	$X_1 - X_7$

3) Zona de no rechazo para Ho: La zona de no rechazo para H0 está formada por todos los valores del estadístico de prueba Wc menores al valor esperado o tabulado $W_{(1-\alpha,\, n)}$):

$$ZA = \left\{W \,/\, W_{calculado} \leq W_{(1-\alpha;n)}\right\}$$

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

La prueba de los rangos con signo de Wilcoxon es una prueba no paramétrica para comparar el rango medio de dos muestras relacionadas y determinar si existen diferencias entre ellas. Se utiliza como alternativa a la prueba t de Student cuando no se puede suponer la normalidad de dichas muestras y por lo tanto no necesita una distribución específica.

El procedimiento de ambas pruebas se basa en el cálculo de diferencias (Di = xi – yi) entre pares de observaciones, pero en la prueba de Wilcoxon se asignan rangos a las diferencias.

Suposiciones:

- Cada Di es una variable aleatoria continua
- La distribución de cada Di es simétrica
- Las Di son independientes
- La escala de medición es al menos de intervalo en las Di.

Hipótesis: Sea Md la mediana de las Di

a) Hipótesis bilateral: Ho: Md = 0 vs HA: Md $\neq$ 0

b) Hipótesis unilateral: Ho: Md = 0 vs HA: Md > 0

c) Hipótesis unilateral: Ho: Md = 0 vs HA: Md < 0 La hipótesis alternativa en B puede interpretarse como “los valores de x son mayores que los de y”, y en el caso de C como “los valores de y son mayores que los de x”.

Estadístico de prueba:

$W_0^+ = \sum R_i^+$ donde $\sum R_i^+$ $\Rightarrow$ es la suma de rangos asociados a las D_i con signo [+].

Alternativamente se puede utilizar como estadístico a D $W_o^- = \sum R_i^-$

Regla de decisión:

Se utiliza la tabla de valores críticos de W para la prueba de Wilcoxon.

1.- Hipótesis bilateral: Rechazar H_o si $W_o < W_{\frac{\alpha}{2}}$ ó $W_o > W_{1-\frac{\alpha}{2}}$. Donde, $W_{1-\frac{\alpha}{2}}$ y $W_{\frac{\alpha}{2}}$, son los valores críticos del lado izquierdo y derecho respectivamente. El valor de $W_{\frac{\alpha}{2}}$ se obtiene directamente en la tabla, y $W_{1-\frac{\alpha}{2}}$ mediante la relación: $W_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{n(n+1)}{2} - W_{1-\frac{\alpha}{2}}$. El término $\frac{n(n+1)}{2}$, se obtiene de la última columna de la misma tabla.

2.- Hipótesis unilateral: Rechazar H_o si $W_o < W_{1-\alpha}$ donde $W_{1-\alpha} = \frac{n(n+1)}{2} - W_\alpha$

3.- Hipótesis unilateral: Rechazar H_o si $W_o < W_\alpha$

En 2 y 3 el nivel α de significancia no se divide entre dos por tratarse de hipótesis unilaterales.

DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

Se desea comparar dos multímetros disponibles en el laboratorio. Para ello se miden 40 resistencias, cada una con cada instrumento (mediciones de a pares). Con esto se comprobará que las mediciones de cada uno son iguales, es decir, que cada multímetro tiene la misma calidad de medición y sensibilidad.

- Herramientas estadísticas:
  - ► Diferencia de las muestras;

$$P\left(\bar{d} - z_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}} < \mu_d < \bar{d} + z_{\propto/2}\sqrt{\frac{\sigma_d^2}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

  - ► Razón de varianzas;

$$P\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\propto/2(v1,v2)}} < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < \frac{S_1^2}{S_2^2}F_{\propto/2(v2,v1)}\right) = 1 - \alpha$$

- Descripción de la experiencia:

Se realizaron mediciones de a pares sobre una muestra de 40 resistencias de un valor nominal de 1kΩ con un porcentaje de error del 5%.

- Hipótesis de partida:

Cada instrumento es del mismo fabricante y comprado en el mismo local, por lo tanto, sus mediciones no difieren una de otra.

Mediciones de las resistencias:

Resistencia N°	Instrumento 1	Instrumento 2	Diferencia (Y1-Y2)
1	1000	994	6
2	993	987	6
3	991	985	6
4	992	986	6
5	990	984	6
6	991	985	6
7	993	986	7
8	992	986	6
9	990	983	7
10	992	986	6
11	998	991	7
12	996	990	6
13	991	985	6
14	990	984	6
15	985	979	6
16	988	982	6
17	1024	1017	7

18	1016	1010	6
19	986	980	6
Resistencia N°	Instrumento 1	Instrumento 2	Diferencia (Y1-Y2)
20	1007	1001	6
21	987	980	7
22	1027	1021	6
23	1021	1014	7
24	1019	1013	6
25	1012	1005	7
26	990	984	6
27	1017	1009	8
28	1028	1022	6
29	983	977	6
30	984	978	6
31	992	986	6
32	999	993	6
33	985	979	6
34	1028	1021	7
35	1015	1009	6
36	991	985	6
37	1027	1020	7
38	1020	1013	7
39	1005	998	7
40	1011	1004	7

Estimación de la media de las diferencias

Cálculos:

n	Media de las diferencias ($\bar{d}$)	Desviación estándar de las diferencias	Varianza muestral de las diferencias
40	6,350	0,533	0,285

Utilizando un intervalo de confianza de 95% vamos a estimar la media de las diferencias de las muestras.

Como el tamaño de la muestra es mayor a 30, por el teorema del límite central: $\bar{y} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{n}\right)$

DATOS DEL INTERVALO				
1-α	Zα/2	ERROR	Li	Ls
0,95	1,960	0,165	6,185	6,515

$$P(6.185 < \mu_d < 6.515) = 0.95$$

Observaciones:

Concluimos que con un nivel de confianza del 95% tenemos un intervalo que no contiene al 0, por lo tanto, no podemos decir que los instrumentos miden iguales, ya que para esto el intervalo debería incluir el 0.

Estimación de la varianza muestral

Utilizando un nivel de confianza del 95% calcularemos la razón de las varianzas de los multímetros. Para esto utilizamos la distribución F de Snedecor.

Cálculos:

n	Varianza muestral del Instrumento 1	Varianza muestral del Instrumento 2
40	217,003	210,421

RAZON DE VARIANZAS						
S1^2/S2^2	Fs	Fi	1-α	gl1=gl2=n-1	Li	Ls
1,031	1,891	0,529	0,95	39	0,545	1,950

$$P\left(0.545 < \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} < 1.950\right) = 0.95$$

Observaciones:

Concluimos que con un nivel de confianza del 95% tenemos un intervalo que contiene al 1, y por lo tanto podemos decir que las varianzas poblacionales pueden ser iguales y que provengan de la misma distribución.

Prueba de hipótesis

Queremos probar que el instrumento 1 mide con la misma sensibilidad que el instrumento 2, es decir, veremos si las mediciones son iguales. Para estos cálculos utilizaremos α=0.05. Dado que n>30, aproximamos a una distribución normal.

Ho: $\mu_d=0$ (el instrumento 1 mide con la misma sensibilidad que la del instrumento 2)

Ha: $\mu_d \neq 0$ (la sensibilidad de ambos instrumentos es distintas)

Calcularemos nuestro Z observado:

$$z_{obs} = \frac{\bar{d} - \mu_d}{\sqrt{\frac{S_d^2}{n}}}$$

PRUEBA DE HIPOTESIS			
α	Zcrit,Inf	Zcrit,Sup	Zobs
0,05	-1,96	1,96	75,228

Ahora haremos los cálculos con α=0.01:

PRUEBA DE HIPOTESIS			
α	Zcrit,Inf	Zcrit,Sup	Zobs
0,01	-2,576	2,576	75,228

Observaciones:

Nuestro z observado cae en la región de rechazo de Ho utilizando un α=0.05 y también con un α=0.01, teniendo un intervalo aún más grande con este último. Por lo tanto, concluimos que la sensibilidad de medición del instrumento 1 no es la misma que la del instrumento 2.

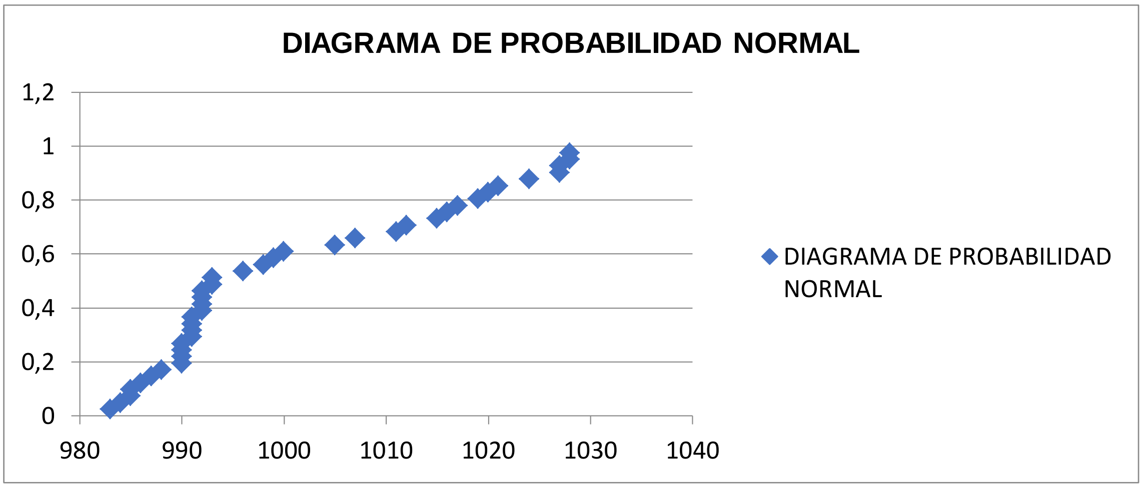
Prueba de Normalidad – Shapiro Wilk

En este caso veremos si las mediciones obtenidas siguen una distribución normal. Para esto analizamos las medidas de cada instrumento por separado con una prueba de Shapiro Wilk.

- **Instrumento 1:**

i	Y_i	$P_i = \frac{i}{n+1}$	$P(Z \leq Z_i)$
1	983	0,024390244	-1,9705053
2	984	0,048780488	-1,65679477
3	985	0,073170732	-1,45257618
4	985	0,097560976	-1,29557499
5	986	0,12195122	-1,16528799
6	987	0,146341463	-1,05225423
7	988	0,170731707	-0,95127772
8	990	0,195121951	-0,85917513
9	990	0,219512195	-0,77384173
10	990	0,243902439	-0,69380441
11	990	0,268292683	-0,61798479
12	991	0,292682927	-0,54556374
13	991	0,317073171	-0,47589899
14	991	0,341463415	-0,40847248
15	991	0,365853659	-0,34285531
16	992	0,390243902	-0,2786834
17	992	0,414634146	-0,2156401
18	992	0,43902439	-0,1534432
19	992	0,463414634	-0,09183483
20	993	0,487804878	-0,0305734
21	993	0,512195122	0,0305734
22	996	0,536585366	0,091834833
23	998	0,56097561	0,153443199
24	999	0,585365854	0,215640104
25	1000	0,609756098	0,278683397
26	1005	0,634146341	0,342855305
27	1007	0,658536585	0,408472482
28	1011	0,682926829	0,47589899
29	1012	0,707317073	0,545563742
30	1015	0,731707317	0,617984788
31	1016	0,756097561	0,693804408
32	1017	0,780487805	0,773841732
33	1019	0,804878049	0,85917513
34	1020	0,829268293	0,951277719
35	1021	0,853658537	1,052254226
36	1024	0,87804878	1,16528799
37	1027	0,902439024	1,295574987
38	1027	0,926829268	1,452576181
39	1028	0,951219512	1,656794766

40	1028	0,975609756	1,970505303



H_0: Las mediciones provienen de una distribución normal
H_a: Las mediciones no provienen de una distribución normal

j	$a_{j,n}$	$y_{(n-j+1)}$	y_j	$a_{j,n}[y_{(n-j+1)} - y_j]$
1	0.3964	1028	983	17,838
2	0,2737	1028	984	12,0428
3	0,2368	1027	985	9,9456
4	0,2098	1027	985	8,8116
5	0,1878	1024	986	7,1364
6	0,1691	1021	987	5,7494
7	0,1526	1020	988	4,8832
8	0,1376	1019	990	3,9904
9	0,1237	1017	990	3,3399
10	0,1108	1016	990	2,8808
11	0,0986	1015	990	2,465
12	0,087	1012	991	1,827
13	0,0759	1011	991	1,518
14	0,0651	1007	991	1,0416
15	0,0546	1005	991	0,7644
16	0,0444	1000	992	0,3552
17	0,0343	999	992	0,2401
18	0,0244	998	992	0,1464
19	0,0146	996	992	0,0584
20	0,0049	993	993	0
				A= 85,0342

$w_{obs} = \frac{A^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ $\quad A^2 = 723{,}8151$

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 8463{,}1$

$\rightarrow w_{obs} = 0{,}85439$

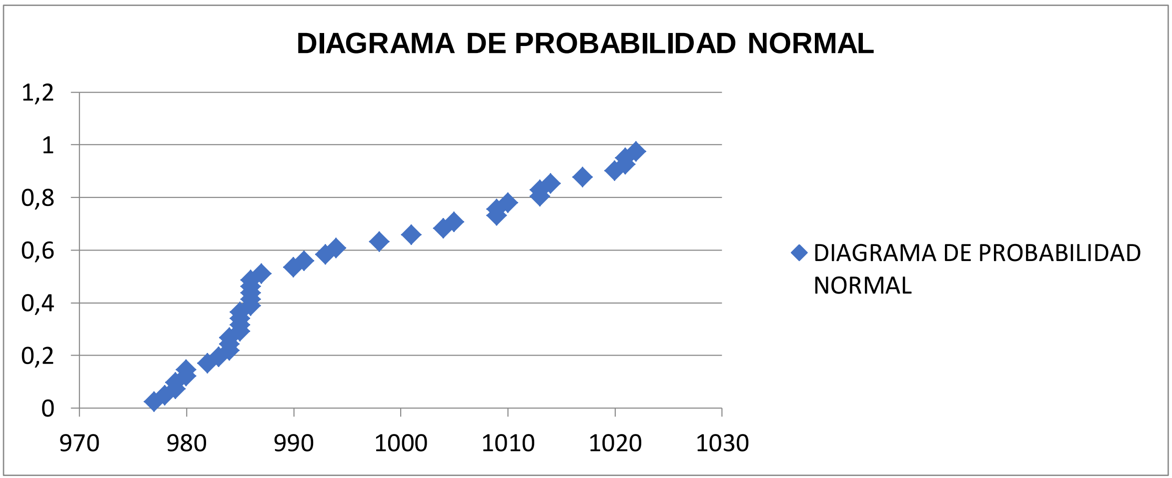
Empleando un α=0.05: $\quad w_{crit} = 0{,}94$

$w_{obs} < w_{crit}$ Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Las mediciones obtenidas por el instrumento 1 no provienen de una distribución normal.

Ahora analizaremos las mediciones del instrumento 2:

- **Instrumento 2:**

i	Y_i	$P_i = \frac{i}{n+1}$	$P(Z \leq Z_i)$
1	977	0,02439024	-1,9705053
2	978	0,04878049	-1,65679477
3	979	0,07317073	-1,45257618
4	979	0,09756098	-1,29557499
5	980	0,12195122	-1,16528799
6	980	0,14634146	-1,05225423
7	982	0,17073171	-0,95127772
8	983	0,19512195	-0,85917513
9	984	0,2195122	-0,77384173
10	984	0,24390244	-0,69380441
11	984	0,26829268	-0,61798479
12	985	0,29268293	-0,54556374
13	985	0,31707317	-0,47589899
14	985	0,34146341	-0,40847248
15	985	0,36585366	-0,34285531
16	986	0,3902439	-0,2786834
17	986	0,41463415	-0,2156401
18	986	0,43902439	-0,1534432
19	986	0,46341463	-0,09183483
20	986	0,48780488	-0,0305734
21	987	0,51219512	0,0305734
22	990	0,53658537	0,09183483
23	991	0,56097561	0,1534432
24	993	0,58536585	0,2156401
25	994	0,6097561	0,2786834
26	998	0,63414634	0,34285531
27	1001	0,65853659	0,40847248
28	1004	0,68292683	0,47589899
29	1005	0,70731707	0,54556374
30	1009	0,73170732	0,61798479
31	1009	0,75609756	0,69380441
32	1010	0,7804878	0,77384173
33	1013	0,80487805	0,85917513
34	1013	0,82926829	0,95127772
35	1014	0,85365854	1,05225423
36	1017	0,87804878	1,16528799
37	1020	0,90243902	1,29557499
38	1021	0,92682927	1,45257618
39	1021	0,95121951	1,65679477
40	1022	0,97560976	1,9705053



H_0: Las mediciones provienen de una distribución normal
H_a: Las mediciones no provienen de una distribución normal

j	$a_{j,n}$	$y_{(n-j+1)}$	y_j	$a_{j,n}[y_{(n-j+1)} - y_j]$
1	0,3964	1022	977	17,838
2	0,2737	1021	978	11,7691
3	0,2368	1021	979	9,9456
4	0,2098	1020	979	8,6018
5	0,1878	1017	980	6,9486
6	0,1691	1014	980	5,7494
7	0,1526	1013	982	4,7306
8	0,1376	1013	983	4,128
9	0,1237	1010	984	3,2162
10	0,1108	1009	984	2,77
11	0,0986	1009	984	2,465
12	0,087	1005	985	1,74
13	0,0759	1004	985	1,4421
14	0,0651	1001	985	1,0416
15	0,0546	998	985	0,7098
16	0,0444	994	986	0,3552
17	0,0343	993	986	0,2401
18	0,0244	991	986	0,122
19	0,0146	990	986	0,0584
20	0,0049	987	986	0,0049
			A=	83,8764

$w_{obs} = \frac{A^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$ $\quad A^2 = 7035{,}25048$

$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 = 8206{,}4$

$\rightarrow w_{obs} = 0{,}85729$

Empleando un α=0.05: $\quad w_{crit} = 0{,}94$

$w_{obs} < w_{crit}$ Por lo tanto, se rechaza la hipótesis nula. Las mediciones obtenidas por el instrumento 2 no provienen de una distribución normal.

Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

Ahora por último en esta experiencia haremos la comparación de las mediciones de las resistencias del instrumento 1 con el instrumento 2 utilizando una prueba de Wilcoxon. Con esto, se comprobará lo obtenido anteriormente (que las mediciones de cada instrumento difieren). Para este caso ordenamos los datos de menos a mayor:

INSTRUMENTO 1	INSTRUMENTO 2	Diferencia (Inst. 1-Inst.2)	Diferencia ordenada	Rango	Signo
1000	994	6	6	1	+
993	987	6	6	2	+
991	985	6	6	3	+
992	986	6	6	4	+
990	984	6	6	5	+
991	985	6	6	6	+
993	986	7	6	7	+
992	986	6	6	8	+
990	983	7	6	9	+
992	986	6	6	10	+
998	991	7	6	11	+
996	990	6	6	12	+
991	985	6	6	13	+
990	984	6	6	14	+
985	979	6	6	15	+
988	982	6	6	16	+
1024	1017	7	6	17	+
1016	1010	6	6	18	+
986	980	6	6	19	+
1007	1001	6	6	20	+
987	980	7	6	21	+
1027	1021	6	6	22	+
1021	1014	7	6	23	+
1019	1013	6	6	24	+
1012	1005	7	6	25	+
990	984	6	6	26	+
1017	1009	8	6	27	+
1028	1022	6	7	28	+
983	977	6	7	29	+
984	978	6	7	30	+
992	986	6	7	31	+
999	993	6	7	32	+
985	979	6	7	33	+
1028	1021	7	7	34	+

INSTRUMENTO 1	INSTRUMENTO 2	Diferencia (Inst. 1-Inst.2)	Diferencia ordenada	Rango	Signo
1015	1009	6	7	35	+
991	985	6	7	36	+
1027	1020	7	7	37	+
1020	1013	7	7	38	+
1005	998	7	7	39	+
1011	1004	7	8	40	+

T+=	820
T-=	0
Tmin=	0

Ho: Las mediciones de los instrumentos son iguales
Ha: Las mediciones son distintas

Dado que n>30 utilizamos $\rightarrow Zobs = \frac{T-\mu_T}{\sigma_T} \sim N(0,1)$

Donde: $\mu_T = \frac{n(n+1)}{4} = \frac{40(40+1)}{4} = 410$

$\sigma_T^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{24} = \frac{40(40+1)(2*40+1)}{24} = 5535$

Entonces: $Zobs = \frac{0-410}{\sqrt{5535}} = -5.51$

Empleando un α=0.05 tenemos Zcrit=1.645, por simetría tenemos Zcrit=-1.645

Como Zobs<Zcrit (-5.51<-1.645) rechazamos Ho, por lo que concluimos que las mediciones obtenidas por cada instrumento son distintas, verificando lo que se concluyó anteriormente.

CONCLUSIONES

En cada caso fue posible realizar la experiencia logrando resultados confiables y coherentes. Se comprobó que aun que los instrumentos presentaban las mismas características, estos diferían en las mediciones de las resistencias, observando que tienen diferente calidad de medición y que a la vez las resistencias no son exactas en su valor nominal.

Para todos los problemas se empleó un nivel de confianza del 95%, el cual es utilizado en la mayoría de los trabajos prácticos de la asignatura, con el cual fue posible el desarrollo de los ejercicios.

BIBLIOGRAFIA

- [1]Diseño de experimentos – Robert O. Kuehl – 2° ed.
- [2]Introducción a la probabilidad y estadística – Mendenhall – 13° ed.
- Tablas de estadística otorgadas por la cátedra.